ESSEC

Ecole Supérieure des Sciences Economiques et Commerciales

Etablissement d'enseignement supérieur privé reconnu par l'Etat

CONCOURS D'ADMISSION de 1983

MATHEMATIQUES - 1ère épreuve - option générale

Samedi 7 mai de 8h à 12h

A tout $n \in \mathbb{N}^*$ on associe la suite $\Gamma_n \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$:

$$\Gamma_n = C_n^0 , C_n^1 , C_n^2 , \ldots , C_n^p , \ldots .$$

définie pour $p \leqslant n$ par $C_n^p = \dfrac{n!}{p\,!\,(n-p)!}$ et pour $n < p$ par $C_n^p = 0$.

(On pose $0\,! = 1$). Puis à toute suite Γ_n on associe les trois nombres α_n , β_n et γ_n définis par :

$$\alpha_n = \sum_{k=0}^{\infty} C_n^{3k} , \beta_n = \sum_{k=0}^{\infty} C_n^{3k+1} \text{ et } \gamma_n = \sum_{k=0}^{\infty} C_n^{3k+2} .$$

I - 1. En utilisant l'application $x \mapsto E(x) = \sup (\mathbb{Z} \cap]-\infty , x])$ trouver les entiers minimum $\tilde{\alpha}_n$, $\tilde{\beta}_n$ et $\tilde{\gamma}_n$ tels que :

$$\alpha_n = \sum_{k=0}^{\tilde{\alpha}_n} C_n^{3k} , \beta_n = \sum_{k=0}^{\tilde{\beta}_n} C_n^{3k+1} \text{ et } \gamma_n = \sum_{k=0}^{\tilde{\gamma}_n} C_n^{3k+2} .$$

2. On pose $a_n = 3\alpha_n - 2^n$, $b_n = 3\beta_n - 2^n$ et $c_n = 3\gamma_n - 2^n$.

Donner sous forme d'un tableau où figurent uniquement des éléments de $\mathbb{N}$ la matrice m , de terme général $m_{n,k}$, de type [8x15], où n indice

de ligne varie de 1 à 8 et k indice de colonne varie de 1 à 15, défini par :

$$n \leqslant 8 \text{ et } k \leqslant 8 \mapsto m_{n,k} = C_n^k \quad \text{sinon}$$

$$m_{n,9} = 2^n , m_{n,10} = \alpha_n , m_{n,11} = \beta_n , m_{n,12} = \gamma_n ,$$

$$m_{n,13} = a_n , m_{n,14} = b_n , m_{n,15} = c_n .$$

3. En admettant provisoirement que les suites a , b et c sont périodiques, préciser les périodes et prévoir les valeurs de α_{34} , β_{36} et γ_{42} .

4. Les suites a , b et c sont-elles linéairement indépendantes ?

5. Les suites α , β et γ sont-elles linéairement indépendantes ?

6. Soit j le nombre complexe de module 1 et d'argument $\frac{2\pi}{3}$.

a) Pour $0 \leqslant n$ expliciter 2^n d'une part et $(1+j)^n$ d'autre part comme combinaisons linéaires de α_n , β_n et γ_n ; les coefficients de ces combinaisons linéaires sont des nombres complexes indépendants de n.

b) Montrer que les suites $n \mapsto 2^n$ et $n \mapsto (1+j)^n$ vérifient une relation de récurrence linéaire de la forme

$$u_{n+3} = p\,u_{n+2} + q\,u_{n+1} + r\,u_n ,$$

où $0 \leqslant n$ et p , q , r sont trois constantes <u>réelles</u> indépendantes de n ; préciser ces constantes.

c) α , β et γ vérifient-elles la même relation ?

d) Expliciter α_n , β_n et γ_n (chacun des nombres α_n , β_n et γ_n sera exprimé sous forme d'une somme de deux nombres réels).

. . . / . . .

II - On pose :

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad H = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et } M^0 = I.$$

1) Montrer que M^4 appartient à l'espace vectoriel engendré par M^3, M^2 et M.

2) Soient α', β' et γ' trois suites définies par

$$\begin{pmatrix} \alpha'_n \\ \beta'_n \\ \gamma'_n \end{pmatrix} = M^n \begin{pmatrix} \alpha'_0 \\ \beta'_0 \\ \gamma'_0 \end{pmatrix} \text{ où } (\alpha'_0, \beta'_0, \gamma'_0) \in \mathbb{R}^3 \text{ est donné et } 0 \leqslant n.$$

Montrer que ces suites vérifient une relation de récurrence linéaire de la forme :

$$u'_{n+3} = p' u'_{n+2} + q' u'_{n+1} + r' u'_n \quad \text{où}$$

$0 \leqslant n$ et $(p', q', r') \in \mathbb{R}^3$ est indépendant de n. Expliciter (p', q', r').

3) Expliciter la matrice H^{-1} inverse de la matrice H.

4) Déterminer $(p'', q'', r'') \in \mathbb{R}^3$ tel que :

$$MH \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = H \begin{pmatrix} p'' \\ q'' \\ r'' \end{pmatrix}.$$

5) Expliciter la matrice P carrée d'ordre 3 telle que pour $0 \leqslant n$ on ait :

$$\begin{pmatrix} \alpha_{n+1} \\ \beta_{n+1} \\ \gamma_{n+1} \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} \alpha_n \\ \beta_n \\ \gamma_n \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \begin{pmatrix} \alpha_0 \\ \beta_0 \\ \gamma_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

6) Expliciter pour $0 \leqslant n$ la matrice P^n et pour $0 \leqslant n-3$, les matrices, $P^{n-3}H$ et $P^{n-3} H \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$